

Informacje

Zadania, które zostały już rozwiązane, mają kółka obok swych numerów zamalowane na czarno.

Jeśli w zadaniu występują podpunkty (a), (b), itd. (a nie (i), (ii), itd.), każdy podpunkt tego zadania to osobne zadanie.

W rozwiązaniu Zadania X można korzystać z Zadania Y (nawet, jeśli Zadanie Y nie zostało jeszcze rozwiązane!), jeśli Zadanie Y występuje w tym zbiorze zadań wcześniej niż Zadanie X oraz Zadanie Y nie ma gwiazdki (chyba, że Zadanie X też ma gwiazdkę).

Notacja i terminologia

Dla dowolnej rodziny $\mathcal{A}$ podzbiorów zbioru X , $\sigma(\mathcal{A})$ oznacza najmniejszą σ -algebrę podzbiorów zbioru X , która zawiera wszystkie zbiory z $\mathcal{A}$ (jest to σ -algebra *generowana* przez $\mathcal{A}$). O σ -algebrze zbiorów powiemy, że jest *ośrodkowa*, jeśli jest generowana przez rodzinę (co najwyżej) przeliczalną.

Miarę μ na σ -algebrze $\mathfrak{M}$ podzbiorów zbioru X nazywamy:

- *σ -skończoną*, jeśli zbiór X można przedstawić jako sumę $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ gdzie zbiory A_n należą do $\mathfrak{M}$ oraz mają skończoną miarę μ (czyli $\mu(A_n) < \infty$);
- *atomem*, jeśli zbiór wartości miary μ jest dwuelementowy;
- *bezatomową*, jeśli spełniony jest następujący warunek: dla dowolnego zbioru $A \in \mathfrak{M}$ o dodatniej mierze μ istnieje zbiór $B \in \mathfrak{M}$, taki że $B \subset A$ oraz $0 < \mu(B) < \mu(A)$;
- *punktowo skończoną*, jeśli zbiory mierzalne o skończonej mierze μ pokrywają zbiór X .

Jeśli X jest przestrzenią topologiczną, to $\mathfrak{B}(X)$ oznacza σ -algebrę generowaną przez wszystkie zbiory otwarte w X . Elementy tej σ -algebry to zbiory *borelowskie*, a funkcje z X w $\mathbb{R}$ mierzalne względem $\mathfrak{B}(X)$ nazywamy funkcjami *borelowskimi*. Ogólniej, jeśli $(Z, \mathfrak{M})$ oraz (Ω, Σ) to przestrzenie mierzalne, wtedy funkcję $f: Z \rightarrow \Omega$ nazywamy $\mathfrak{M}$ - Σ -*mierzalną* (lub krótko *mierzalną*), jeśli $f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}$ dla dowolnego zbioru $B \in \Sigma$. Jeśli f jest bijekcją $\mathfrak{M}$ - Σ -mierzalną, a jej funkcja odwrotna f^{-1} jest Σ - $\mathfrak{M}$ -mierzalna, wtedy f nazywamy *izomorfizmem* przestrzeni mierzalnych.

Dla rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ oraz zbioru C określamy $\mathcal{A} \upharpoonright C$ jako rodzinę zbiorów $\{A \cap C: A \in \mathcal{A}\}$.

Przestrzeń *polska* to ośrodkowa przestrzeń topologiczna, która jest metryzowalna w sposób zupełny.

Uwaga: W zadaniach można używać następującego twierdzenia Aleksandrowa-Hausdorffa: podprzestrzeń przestrzeni metryzowalnej w sposób zupełny jest metryzowalna w sposób zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy jest to podzbiór typu $\mathcal{G}_\delta$.

Zestaw 1

1.1.● (3) Podać przykład niezerowej miary $\mu: \mathfrak{M} \rightarrow [0, 1]$ (określonej na σ -algebrze podzbiorów zbioru X), o następujących własnościach:

- dla dowolnego punktu $x \in X$ istnieje zbiór $A \in \mathfrak{M}$, taki że $x \in A$ oraz $\mu(A) = 0$;
- $\mu(B) \in \{0, 1\}$ dla dowolnego zbioru $B \in \mathfrak{M}$.

1.2.● (4) Wykazać, że jeśli μ jest punktowo skończoną miarą bezatomową na zbiorze X , to dla każdego punktu x zbioru X istnieje zbiór mierzalny A , taki że $x \in A$ oraz $\mu(A) = 0$.

1.3.○ (5) Wykazać, że jeśli μ jest miarą σ -skończoną określoną na ośrodkowej σ -algebrze $\mathfrak{M}$, to μ jest bezatomowa wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt zbioru X należy do zbioru mierzalnego o mierze zero.

1.4.● (5) Wykazać, że jeśli $\mu: \mathfrak{M} \rightarrow [0, \infty]$ jest miarą bezatomową, to dla dowolnego zbioru $A \in \mathfrak{M}$ oraz liczby t spełniającej $0 < t < \mu(A)$ istnieje zbiór mierzalny $B \subset A$, taki że $\mu(B) = t$.

1.5.○ (5) Niech X będzie zwartą przestrzenią metryzowalną. Oznaczmy przez $\mathcal{A}$ najmniejszą rodzinę funkcji $u: X \rightarrow \mathbb{R}$, która ma następujące własności:

- $\mathcal{A}$ zawiera wszystkie funkcje ciągłe z X w $\mathbb{R}$;
- jeśli funkcje $u_1, u_2, \dots \in \mathcal{A}$ są wspólnie ograniczone i zbiegają punktowo do funkcji $u: X \rightarrow \mathbb{R}$, to funkcja u także należy do $\mathcal{A}$.

Wykazać, że $\mathcal{A}$ pokrywa się z rodziną wszystkich ograniczonych funkcji borelowskich z X w $\mathbb{R}$.

Czy w powyższym zadaniu możemy metryzowalność przestrzeni pominąć lub zastąpić jakimś innym warunkiem (topologicznym)?

1.6.○ (4) Dla skończonej niezerowej miary μ na zbiorze X wykazać równoważność następujących warunków:

- całka względem μ jest funkcjonałem multiplikatywnym, tj. $\int_X fg \, d\mu = \int_X f \, d\mu \cdot \int_X g \, d\mu$ dla dowolnych ograniczonych funkcji mierzalnych $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$;
- $\mu(A) \in \{0, 1\}$ dla dowolnego zbioru mierzalnego $A \subset X$.

1.7.● (5) Wykazać, że istnieje rodzina $\mathcal{J}$ podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$, która spełnia następujące warunki:

- $\mathbb{N} \notin \mathcal{J}$ oraz $\{n\} \in \mathcal{J}$ dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$;
- $A \cup B \in \mathcal{J}$ dla wszelkich $A, B \in \mathcal{J}$;
- jeśli $B \in \mathcal{J}$ oraz $A \subset B$, wtedy $A \in \mathcal{J}$;
- dla dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{N}$: $A \in \mathcal{J}$ lub $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{J}$.

1.8.● (3) Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów A zbioru $\mathbb{N}$, dla których ciąg $(\frac{|A \cap I_n|}{n})_{n=1}^\infty$ jest zbieżny (gdzie $|B|$ oznacza moc zbioru oraz $I_n \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}$). Niech $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ będzie funkcją zbioru daną wzorem $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap I_n|}{n}$. Wykazać, że:

- $\mathcal{F}$ nie jest σ -algebrą;
- $A \cup B \in \mathcal{F}$ oraz $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ dla dowolnych rozłącznych zbiorów $A, B \in \mathcal{F}$;
- istnieje ciąg $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ parami rozłącznych zbiorów, takich że zbiór $A \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ należy do $\mathcal{F}$, ale $\mu(A) \neq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$.

1.9.● (5) Czy rodzina $\mathcal{F}$ z poprzedniego zadania jest algebrą zbiorów?

1.10.○ (4) Niech K będzie zwartą przestrzenią metryzowalną, a $\mu: \mathfrak{B}(K) \rightarrow \{0, 1\}$ dowolną miarą, taką że $\mu(K) = 1$. Wykazać, że wtedy $\mu = \delta_a$ dla pewnego punktu $a \in K$ (gdzie $\delta_a(A) = 1$, gdy $a \in A$ oraz $\delta_a(A) = 0$ w przeciwnym przypadku; δ_a to tzw. *delta Diraca* [lub *miara Diraca*] w punkcie a).

1.11.● (3) Niech $\mathcal{R}$ będzie σ -pierścieniem podzbiorów zbioru X , tzn. taką rodziną zbiorów, że:

- $\emptyset \in \mathcal{R}$;
- $A \setminus B \in \mathcal{R}$ dla wszelkich $A, B \in \mathcal{R}$;
- ilekroć $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R}$, tylekroć $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{R}$.

Wykazać, że:

$$\sigma(\mathcal{R}) = \{A \subset X: A \in \mathcal{R} \vee X \setminus A \in \mathcal{R}\}.$$

Zestaw 2

- 2.1.○ (3) Niech $f_1, f_2, \dots: X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji $\mathfrak{M}$ -mierzalnych (gdzie $\mathfrak{M}$ to σ -algebra podzbiorów zbioru X). Wykazać, że wtedy zbiór złożony z wszystkich $x \in X$, takich że ciąg $f_1(x), f_2(x), \dots$ jest zbieżny (w $\mathbb{R}$), należy do $\mathfrak{M}$.
- 2.2.● (5) Niech X i Y będą ośrodkowymi przestrzeniami metryzowalnymi, a $f: X \rightarrow Y$ dowolną funkcją borelowską. Wykazać, że wtedy wykres funkcji f jest zbiorem borelowskim w $X \times Y$.
- 2.3**.○ (5) Niech Z będzie przestrzenią metryzowalną mocy nie większej niż $2^{\aleph_0}$, a $(X, \mathfrak{M})$ dowolną przestrzenią mierzalną. Wykazać, że jeśli funkcje $f, g: X \rightarrow Z$ są mierzalne (tzn. są $\mathfrak{M}$ - $\mathfrak{B}(Z)$ -mieralne), to zbiór $\{x \in X: f(x) = g(x)\}$ należy do $\mathfrak{M}$.
- 2.4.○ (4) Niech $(X, \mathfrak{M})$ oraz (Ω, Σ) będą dwiema przestrzeniami mierzalnymi. Wykazać, że jeśli istnieją zbiory $X' \in \mathfrak{M}$ oraz $\Omega' \in \Sigma$, takie że przestrzenie mierzalne $(X, \mathfrak{M})$ oraz $(\Omega', \Sigma \upharpoonright \Omega')$ są izomorficzne i podobnie $(X', \mathfrak{M} \upharpoonright X')$ i (Ω, Σ) są izomorficzne, to również $(X, \mathfrak{M})$ oraz (Ω, Σ) są izomorficzne.
- 2.5.○ (4) Niech X będzie ośrodkową przestrzenią metryzowalną. Wykazać, że zbiór $A \subset X$ jest borelowski wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny punkt zbioru A ma otoczenie U (w X), takie że $A \cap U \in \mathfrak{B}(X)$.
- 2.6.○ (5) Podać przykład przestrzeni metryzowalnej X i jej podzbioru A o tej własności, że każdy punkt przestrzeni X ma otoczenie otwarte U , takie że $U \cap A \in \mathfrak{B}(X)$, ale $A \notin \mathfrak{B}(X)$.
- 2.7**.○ (5) Wykazać, że jeśli podzbiór A przestrzeni metryzowalnej X ma tę własność, że każdy punkt zbioru A ma otoczenie U (w X), takie że $A \cap U$ jest zbiorem typu $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ w X , to zbiór A jest tegoż typu w X .
- 2.8.○ (3) Niech X i Y będą dwoma σ -zwartymi lokalnie zwartymi przestrzeniami T_2 , a F zbiorem domkniętym w $X \times Y$. Wykazać, że rzut zbioru F na przestrzeń X (czyli zbiór $\{x: (x, y) \in F\}$) jest zbiorem borelowskim w X .
- 2.9**.○ (5) Czy rzut na pierwszą współrzędną każdego zbioru borelowskiego w $[0, 1]^2$ jest zbiorem borelowskim?
- 2.10.○ (3) Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a Y jej dowolną podprzestrzenią. Wykazać, że $\mathfrak{B}(Y) = \mathfrak{B}(X) \upharpoonright Y$. Wywnioskować stąd, że jeśli $Y \in \mathfrak{B}(X)$, to $Z \subset Y$ należy do $\mathfrak{B}(Y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy należy do $\mathfrak{B}(X)$.
- 2.11.○ (3) Niech μ będzie σ -skończoną miarą określoną na σ -algebrze $\mathfrak{M}$. Wykazać, że istnieje miara $\lambda: \mathfrak{M} \rightarrow [0, 1]$, taka że dla dowolnego zbioru $A \in \mathfrak{M}$ zachodzi równoważność:
- $$\mu(A) = 0 \iff \lambda(A) = 0.$$
- 2.12.○ (4) Niech $\mu: \mathfrak{M} \rightarrow [0, \infty]$ będzie dowolną miarą na zbiorze X . Określamy $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ formułą $\mu^*(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\mu(B): A \subset B \in \mathfrak{M}\}$. Wykazać, że μ^* to miara zewnętrzna przedłużająca miarę μ , taka że
- $$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n)$$
- dla dowolnego wstępującego ciągu zbiorów $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset X$.
- 2.13.○ (3) Podać przykład miary zewnętrznej określonej na zbiorze potęgowym pewnego zbioru, która nie ma własności wyrażonej w wystawionym wzorze w poprzednim zadaniu.

Zestaw 3

3.1.○ (3) Wykazać, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór U otwarty w $\mathbb{R}$, taki że $\bar{U} = [0, 1]$ oraz $|U| < \varepsilon$, gdzie $|U|$ oznacza jednowymiarową miarę Lebesgue’a zbioru U .

3.2.○ (4) Niech $\mathfrak{M}$ będzie σ -algebrą na zbiorze X , a $T \subset X$ zbiorem nienależącym do $\mathfrak{M}$. Podać „zgrabny” wzór na $\sigma(\mathfrak{M} \cup \{T\})$. (Odpowiedź uzasadnić).

3.3.○ (4) Wykazać, że niezerowa miara skończona μ jest atomem wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń $L^1(\mu)$ jest jednowymiarowa.

3.4.○ (5) Dla rodziny $\mathcal{A}$ podzbiorów zbioru X oznaczmy przez $\text{mon}(\mathcal{A})$ najmniejszą rodzinę $\mathcal{D}$ podzbiorów zbioru X o własnościach:

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$;
- jeśli $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ i $A_n \in \mathcal{D}$ ($n > 0$), wtedy $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$;
- jeśli $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ i $A_n \in \mathcal{D}$ ($n > 0$), wtedy $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Wykazać, że jeśli $\mathcal{A}$ jest algebrą zbiorów, to $\text{mon}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

3.5.○ (4) Wywnioskować z poprzednich zadań, że jeśli μ i λ to dwie skończone miary borelowskie na $\mathbb{R}$, takie że $\mu((-\infty, a)) = \lambda((-\infty, a))$ dla dowolnej liczby $a \in \mathbb{R}$, to $\mu = \lambda$.

3.6.○ (5) Wykazać, że jeśli μ jest miarą σ -skończoną określoną na ośrodkowej σ -algebrze, to przestrzeń Banacha $L^1(\mu)$ jest ośrodkowa.

3.7.○ (4) Niech μ będzie borelowską miarą probabilistyczną na $[0, 1]$, taką że $\mu(\{a\}) = 0$ dla wszelkich $a \in [0, 1]$ oraz $\mu(U) > 0$ dla dowolnego niepustego zbioru U otwartego w $[0, 1]$. Wykazać, że wtedy istnieje homeomorfizm $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, taki że $\mu(A) = |h(A)|$ dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subset [0, 1]$ (gdzie $|\cdot|$ oznacza jednowymiarową miarę Lebesgue’a). Ile jest takich homeomorfizmów?

3.8.○ (3) Niech $A_1, A_2, \dots$ będzie ciągiem zbiorów z σ -algebry $\mathfrak{M}$, a μ taką miarą na $\mathfrak{M}$, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

Wykazać, że wtedy zbiór $Z \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ należy do $\mathfrak{M}$ oraz $\mu(Z) = 0$.

3.9.○ (5) Podać przykład miary bezatomowej, która nie jest punktowo skończona.

3.10.○ (4) Wykazać, że jeśli $f_n: Z \rightarrow X_n$ (dla $n > 0$) jest funkcją $\mathfrak{M}$ -mierzalną (gdzie $\mathfrak{M}$ jest σ -algebrą na Z), a X_n jest ośrodkową przestrzenią metryzowalną, to zestawienie $(f_n)_{n=1}^{\infty}: Z \ni z \mapsto (f_n(z))_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ jest odwzorowaniem $\mathfrak{M}$ -mierzalnym (przy czym na zbiorze $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ rozważamy topologię produktową).

3.11.○ (4) Niech μ będzie σ -skończoną miarą borelowską na przestrzeni polskiej X . Wykazać, że istnieje ciąg $K_1, K_2, \dots$ zbiorów zwartych w X , taki że $\mu(X \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n)) = 0$.

3.12.○ (5) Niech μ będzie σ -skończoną miarą borelowską na przestrzeni polskiej X . Wykazać, że dla dowolnego zbioru borelowskiego $B \in \mathfrak{B}(X)$ istnieje ciąg $K_1, K_2, \dots$ zwartych podzbiorów zbioru B , taki że $\mu(B \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n)) = 0$.